Chapitre 3

Applications linéaires

Présentation

Ce PDF est le premier support de cours de l'ECUE ALM du S2 : applications linéaires et matrices. Il porte sur la notion d'applications linéaires.

Il sert de substitution et/ou de complément des MiMos concernant ce même sujet. Il y a tout ce qui vous servira pour faire les TD.

Les définitions sont en violet, les théorèmes et propositions en rouges et les exemples à connaitre en bleu. La dernière partie de ce support comporte les démonstrations à connaitre sur ce thème.

Vous trouverez aussi des commentaires (remarques, warning) qu'il ne faut pas négliger.

Il y a par ailleurs quelques exemples supplémentaires et exercices fondamentaux.

Table des matières

1 Généralités 3
1.1 Définitions et exemples 3
1.2 Propriétés 4
2 Noyau et image d'une application linéaire 5
2.1 Définitions, exemples 5
2.2 Lien avec l'injectivité et la surjectivité 8
2.3 Théorème du rang 9
2.4 Un exemple d'application linéaire : les projecteurs 9
3 Les démonstrations à connaitre 10
3.1 Structure d'espaces vectoriels du noyau et de l'image 10
3.2 Lien avec l'injectivité et la surjectivité 11

1 Généralités

1.1 Définitions et exemples

Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application.

On dit que f est linéaire si

$$\forall\,(u,v) \in E^2 \text{ et } \forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$$



Cette caractérisation peut aussi être remplacée par l'une ou l'autre des deux suivantes (c'est à vous de faire votre choix, elles sont équivalentes !) :

- $\forall\,(u,v) \in E^2$ et $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\alpha u) = \alpha f(u)$
- $\forall\,(u,v) \in E^2$ et $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Vocabulaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
- Cas $E = F$. $\mathcal{L}(E,E)$ se note simplement $\mathcal{L}(E)$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un endomorphisme de E.

Par la suite, E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Propriété

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Preuve :

- D'une part, par linéarité, $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$.
- D'autre part, comme $f(0_E) \in F$, $f(0_E) = f(0_E) + 0_F$.
- Ainsi, $f(0_E) + f(0_E) = f(0_E) + 0_F$. Cela implique que $f(0_E) = 0_F$.



On rappelle que, quand une implication est vraie, sa contraposée est vraie. Ainsi :

$$\text{Si } f(0_E) \neq 0_F \text{ alors } f \notin \mathcal{L}(E,F)$$

ce qui est très intéressant aussi ! 

Exemples

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-3y, x-z) \end{array} \right.$

   On remarque qu'on a à faire à des combinaisons linéaires sur les coordonnées : cela va (toujours) marcher ! Montrons que f est linéaire : soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   On a alors : $\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$. Par conséquent :

   $$\begin{aligned} f(\alpha u + v) &= (2(\alpha x + x') - 3(\alpha y + y'), (\alpha x + x') - (\alpha z + z')) \\ &= (\alpha(2x-3y) + (2x'-3y'), \alpha(x-z) + (x'-z')) \\ &= \alpha(2x-3y, x-z) + (2x'-3y', x'-z') \text{ par opérations dans } \mathbb{R}^2 \\ &= \alpha f(u) + f(v) \end{aligned}$$

   Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1)P(2) \end{array} \right.$

   On remarque un produit interne $P(1)P(2)$. g ne peut pas être linéaire. Il faut donc donner un contre-exemple obligatoirement !

   Prenons $P = X$ et $Q = X^2$. $g(P) = 1 \times 2 = 2$, $g(Q) = 1 \times 4 = 4$. Ainsi, $g(P) + g(Q) = 6$.

   De plus, $P + Q = X + X^2$. Ainsi, $g(P+Q) = (1+1) \times (2+4) = 12 \neq g(P) + g(Q)$. g n'est pas linéaire.

3. $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+3, z+t+x, 3t) \end{array} \right.$

   On remarque que $h(0_{\mathbb{R}^4}) = (3,0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. h n'est donc pas linéaire.

Exemple classique

L'application $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E. On l'appelle « application identité de E ».

1.2 Propriétés

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Propriétés

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g \in \mathcal{L}(E,F)$.
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriétés : composition et bijection réciproque

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

2 Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Définitions, exemples

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle « noyau de f » le sous-ensemble de E, noté $\mathrm{Ker}(f)$, défini par

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\}$$

- On appelle « image de f » le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$, défini par

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u),\ u \in E\} = \{v \in F,\ \exists\, u \in E,\ v = f(u)\}$$



- $u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_F$
- $v \in \mathrm{Im}(f) \iff v = f(u)$ avec $u \in E$ (en toute rigueur : $\exists\, u \in E,\ v = f(u)$)
- Rappelez-vous du séminaire S1 

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = f(E)$$

Proposition

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.



C'est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemples classiques



Avant toute chose, pour trouver un noyau ou une image, vous ne devez jamais oublier que le noyau est inclus dans l'espace de départ et l'image dans l'espace d'arrivée.

La plupart du temps, on travaillera en dimension finie et on vous en demandera une base. Vos réponses doivent donc être cohérentes. Une base du noyau doit être composée de vecteurs de E, par exemple de polynômes de degré au plus 2 si $E = \mathbb{R}_2[X]$, de triplets si $E = \mathbb{R}^3$. Il ne faut pas confondre les deux ! ! Il en est de même pour l'image.

Dernier point : une base est une famille génératrice et libre. Donc, quand on vous demande de trouver une base du noyau ou de l'image, il faut d'abord en trouver une famille génératrice (en écrivant l'ensemble sous forme de Vect). Il faut ensuite justifier que la famille obtenue est libre ! Les 3 mots : « génératrice », « libre » et « base » doivent être écrits.

1- Trouvons une base du noyau et de l'image de l'application linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-4y, x-z) \end{array} \right.$$

• On revient à la définition des deux sous-ensembles, en adoptant les notations au contexte dans lequel nous sommes.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x,y,z)) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (2x-4y, x-z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-4y = 0 \text{ et } x-z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y \text{ et } x = z\} \\ &= \{(2y,y,2y),\ y \in \mathbb{R}\} \text{ en fixant } y \\ &= \{y(2,1,2),\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((u)) \text{ avec } u = (2,1,2) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (u) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, la famille (u) est libre. On peut donc conclure que (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarque : ici, on a choisi de fixer y mais vous êtes libres et pouvez fixer aussi bien x que z. Le tout est de voir que la donnée d'une seule des 3 coordonnées suffit pour décrire les éléments du noyau.

Exemples classiques (suite)

• Trouvons à présent l'image de f.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{f((x,y,z)), (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} = \{(2x-4y, x-z),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{x(2,1)+y(-4,0)+z(0,-1),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \mathrm{Vect}((u_1,v,w)) \text{ avec } u_1=(2,1),\ v=(-4,0) \text{ et } w=(0,-1)\\ &= \mathrm{Vect}((v,w)) \text{ car } u_1 = -\frac{1}{2}v - w\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (v,w) est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme v et w ne sont pas colinéaires, la famille (v,w) est libre. On peut donc conclure que (v,w) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque : il fallait voir que la famille (u_1,v,w) était liée. Ici, on a choisi d'éliminer u_1. On aurait pu éliminer v ou w.

2- Trouvons une base du noyau et de l'image de l'application linéaire

$$g : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ P & \longmapsto & (P(0),P(0))\end{array}\right.$$

• On revient à la définition des deux sous-ensembles, en adoptant les notations au contexte dans lequel nous sommes.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(g) &= \{P = aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X],\ f(P)=(0,0)\}\\ &= \{aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X],\ (c,c)=(0,0)\}\\ &= \{aX^2+bX, (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}((P,Q)) \text{ avec } P=X^2 \text{ et } Q=X\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (P,Q) est génératrice de $\mathrm{Ker}(g)$. Comme ces 2 polynômes ne sont pas proportionnels, la famille (P,Q) est libre. On peut donc conclure que (P,Q) est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

•

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(g) &= \{g(aX^2+bX+c), (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{(c,c),\ c\in\mathbb{R}\}\\ &= \{c(1,1),\ c\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}((u)) \text{ avec } u=(1,1)\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (u) est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$. Comme $u\neq 0_{\mathbb{R}^2}$, la famille (u) est libre. On peut donc conclure que (u) est une base de $\mathrm{Im}(g)$.

2.2 Lien avec l'injectivité et la surjectivité

Retour au séminaire S1 
On rappelle que

Définition : rappels

Soient E, F deux **ensembles** et $f : E \longrightarrow F$ une application **quelconque**. On dit que :

- f est injective si $\forall\, (u, u') \in E^2,\ f(u) = f(u') \implies u = u'$
- f est surjective si $\forall\, v \in F,\ \exists\, w \in E,\ v = f(w)$

Il existe un lien avec le noyau et l'image de f quand f est linéaire.

Proposition

Soient E, F deux **espaces vectoriels** et $f : E \longrightarrow F$ une application **linéaire**.

- f injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
- f surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$



C'est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemples

Reprenons les deux exemples précédents : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-4y, x-z) \end{array} \right.$
et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(0)) \end{array} \right.$.

- Ni f ni g ne sont injectives car $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
- La dimension de $\mathrm{Im}(g)$ est égale à 1 car une de ses bases est $((1,1))$. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\mathrm{Im}(g) \neq \mathbb{R}^2$. g n'est donc pas surjective.
- La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est égale à 2 car une de ses bases est $((-4,0),(0,-1))$.
  Ainsi, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. De plus, on sait, d'après le cours que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est donc surjective.



Attention aux erreurs fréquentes : 

- Vous avez tendance à écrire $\mathrm{Ker}(f) = 0_{\mathbb{R}^3}$ par exemple au lieu de $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- Vous allez souvent trop vite et écrivez « $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ ».

Ce n'est pas parce que deux espaces vectoriels ont la même dimension qu'ils sont égaux **sauf** si l'un est inclus dans l'autre. Mais dans ce cas là, cela doit être écrit sur votre copie.

2.3 Théorème du rang

Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels tels que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Cette dimension est appelée rang de f et notée $\mathrm{rg}(f)$.
- On a l'égalité suivante : $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$

Remarque : il suffit que E soit de dimension finie pour que $\mathrm{Im}(f)$ soit de dimension finie car $\mathrm{Im}(f)$ va être engendré par les images d'une base de E.

Exemples

Ce théorème peut

- vous permettre de vérifier la cohérence de vos résultats.

  Par exemple, pour $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0),P(0)) \end{array} \right.$, on a trouvé (X, X^2) comme base pour $\mathrm{Ker}(g)$ et $((1,1))$ comme base pour $\mathrm{Im}(g)$. On en déduit que : $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 1$.

  Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, nos résultats sont cohérents.

- vous permettre de savoir à l'avance la dimension du noyau ou de l'image quand vous avez déjà trouvé l'un d'entre eux.

  Par exemple, pour $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -2x-2y) \end{array} \right.$

  Il est facile de voir qu'une base du noyau de h est $((1,-1))$. Donc le noyau est de dimension 1.

  Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{Ker}(h)) = 2 - 1 = 1$.

  Par ailleurs, $v = (1,-2) \in \mathrm{Im}(h)$ car $v = h((1,0))$. Or (v) est libre car $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. (v) est donc une famille libre de cardinal égal à 1 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est donc une base de l'image de h.

2.4 Un exemple d'application linéaire : les projecteurs

Plaçons nous dans le contexte suivant :

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E :

$$F \oplus G = E$$

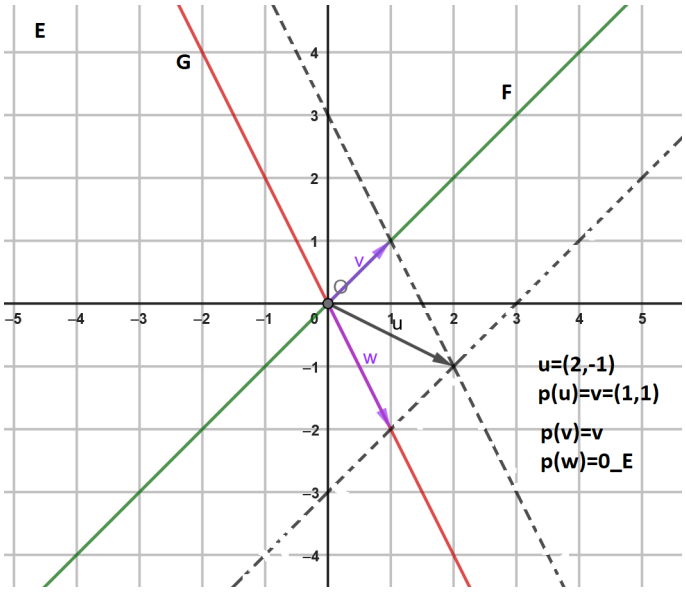
On sait alors que $\forall\, u \in E, \exists !\, (v,w) \in F \times G,\ u = v + w$.

On définit alors l'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & E \\ u & \longmapsto & v \end{array} \right.$

- Il est facile de vérifier que p est un endomorphisme de E.
- Soit $u \in F$. L'unique décomposition de u dans $F+G$ est $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. On en déduit que $p(u) = u$ dans ce cas. On vérifie alors que $\mathrm{Im}(p) = F$.
- Soit $u \in G$. L'unique décomposition de u dans $F+G$ est $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}$. On en déduit que $p(u) = 0_E$ dans ce cas. On vérifie alors que $\mathrm{Ker}(p) = G$.

- Soit $u = v + w \in E$. On a $p \circ p(u) = p(p(u)) = p(v) = v = p(u)$ par ce qui précède. Ainsi, $p \circ p = p$. On dit que p est un projecteur.

Terminons par un dessin d'un tel endomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. F et G sont deux droites vectorielles distinctes.



Pour trouver l'image de u, on fait sa projection sur F parallèlement à G. Un projecteur est donc une projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Remarque : graphiquement, par projection, on voit bien que $p(v) = v$ et $p(w) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

3 Les démonstrations à connaitre

3.1 Structure d'espaces vectoriels du noyau et de l'image

Proposition

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

1. • On a $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ et comme f est linéaire de E vers F, $f(0_E) = 0_F$. D'où, $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.

   • Soient $(u, v) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha\, u + v) &= \alpha\, f(u) + f(v) \text{ par linéarité de } f \\ &= \alpha\, 0_F + 0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

   Donc, $\alpha\, u + v \in \mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f)$ est bien un sev de E.

2. • On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et comme f est linéaire de E vers F, $0_F = f(0_E)$. D'où, $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.

• Soient $(v, v') \in (\mathrm{Im}(f))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha\, v + v' &= \alpha\, f(w) + f(w') \text{ avec } (w, w') \in E^2 \\ &= f(\alpha\, w + w') \text{ par linéarité de } f \end{aligned}$$

Comme $\alpha\, w + w' \in E$, $\alpha\, v + v' \in \mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)$ est bien un sev de F.

3.2 Lien avec l'injectivité et la surjectivité

Théorème

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$.

Preuve :

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective. On sait que :

$$\forall\, (u, u') \in E^2,\ f(u) = f(u') \implies u = u'$$

• Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
$f(u) = 0_F$ et $0_F = f(0_E)$ (car f linéaire) d'où $f(u) = f(0_E)$. Par injectivité de f, on obtient $u = 0_E$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$.

• Comme, $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Soit $(u, u') \in E^2$ tel que $f(u) = f(u')$. On a

$$\begin{aligned} f(u) = f(u') &\implies f(u) - f(u') = 0_F \\ &\implies f(u - u') = 0_F \text{ par linéarité de } f \\ &\implies u - u' \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\implies u - u' \in \{0_E\} \text{ par notre hypothèse} \\ &\implies u - u' = 0_E \\ &\implies u = u' \end{aligned}$$

f est donc injective.

2. On a

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \forall\, v \in F,\ \exists\, u \in E,\ v = f(u) \\ &\iff \forall\, v \in F,\ v \in \mathrm{Im}(f) \\ &\iff F \subset \mathrm{Im}(f) \\ &\iff F = \mathrm{Im}(f) \text{ car l'inclusion } \mathrm{Im}(f) \subset F \text{ est toujours vraie} \end{aligned}$$